APLICACIONES LINEALES. CAMBIO DE BASE.

Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y $B_V = \{\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ y $B_W = \{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_m}\}$ bases de V y W respectivamente respecto de las cuales la expresión matricial de f es

$$f(\overrightarrow{x}) = M\overrightarrow{x},\ \forall\overrightarrow{x} \in V$$

o bien

$$\overrightarrow{y_{B_W}} = M\overrightarrow{x_{B_V}}, \forall\overrightarrow{x} \in V \tag{Ec.1}$$

Sea $B'_V = \{\overrightarrow{e'_1}, ..., \overrightarrow{e'_n}\}$ otra base de V de manera que si $\overrightarrow{x_{B_V}}$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{x}$ en la base B_V y $\overrightarrow{x_{B'_V}}$ son las coordenadas del vector $\overrightarrow{x}$ en la base B'_V entonces la ecuación del cambio de base de B'_V a B_V es

$$\overrightarrow{x_{B_V}} = P\overrightarrow{x_{B'_V}} \tag{Ec. 2}$$

siendo P la matriz correspondiente a este cambio de base.

De forma análoga, si B'_W es otra base de W la ecuación del cambio de base de B'_W a B_W es

$$\overrightarrow{y_{B_w}} = Q\overrightarrow{y_{B'_W}} \tag{Ec. 3}$$

y Q es la matriz del cambio de base.

Sustituyendo las expresiones de $\overrightarrow{x_{B_V}}$ y de $\overrightarrow{y_{B_w}}$ de Ec. 2 y Ec. 3 en Ec. 1 obtenemos la Ec. 4

$$Q\overrightarrow{y_{B'_W}} = MP\overrightarrow{x_{B'_V}} \tag{Ec. 4}$$

y despejando

$$\overrightarrow{y_{B'_W}} = Q^{-1}MP\overrightarrow{x_{B'_V}}$$

Pues bien, el producto de matrices $Q^{-1}MP$ es una matriz M' que representa la matriz de la aplicación f en las bases B'_V y B'_W. Las matrices M y M' son matrices equivalentes.

En el caso de endomorfismos las matrices P y Q coinciden y la relación entre M y M' es de semejanza

$$M' = P^{-1}MP \tag{Ec.6}$$